ALGEBRAISCHE STRUKTUREN

ÜBUNGSBLATT 3

1. Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe der Quaternionen
$$\mathbb{H} = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}.$$
Man zeige, dass alle Untergruppen von $\mathbb{H}$ Normalteiler sind.

2. Für jede Gruppe $(G, \cdot)$ betrachte man das Zentrum
$$Z(G) = \{g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G\}.$$
   a) Man zeige, dass $Z(G) \trianglelefteq G$.
   b) Ist $H \leq \mathbb{Z}(G)$ so gilt $H \trianglelefteq G$.

3. Sei$H$ eine Untergruppe der Gruppe $(G, \cdot)$. Ist $|G : H| = 2$, so gilt $H \trianglelefteq G$.

4. Sei $A_1A_2A_3$ ein gleichseitiger Dreieck in der Ebene E. Wir betrachten E als eine Menge von Punkten, so ist $(S(E), \circ)$ eine Gruppe (die symmetriche Gruppe der Menge E). Man betrachte die Teilmenge
$$D_3 = \{f \in S(G) \mid f(A_1A_2A_3) = A_1A_2A_3\},$$
wobei der Dreieck als eine Teilmenge von E gesehen wird.
   a) Man zeige, dass D_3 eine Gruppe ist (sie heißt die dritte Diedergruppe).
   b) Man zeige, dass $D_3 \cong S_3$, wobei S_3 die symmetrische Gruppe der Menge $\{1, 2, 3\}$ ist.
   c) Man schriebe die Tafel der Gruppe D_3.
   d) Man bestimme alle Unetrgruppen von D_3.
   e) Man finde eine Untergruppe von D_3 die keiner Noremalteiler ist.

5. Sei $A_1A_2A_3A_4$ ein Quadrat in der Ebene E. Man betrachte die Teilmenge
$$D_4 = \{f \in S(G) \mid f(A_1A_2A_3A_4) = A_1A_2A_3A_4\}.$$
   a) Man zeige, dass D_4 eine Gruppe ist (sie heißt die vierte Diedergruppe).
   b) Man zeige, dass $D_4 \leq S_4$.
   c) Man schriebe die Tafel der Gruppe D_4.
   d) Verallgemeinerung für D_n, $n \geq 3$.

"Babeş-Bolyai" Universität, Fakultät für Mathematik und Informatik, RO-400084, Cluj-Napoca, Rumänien
E-mail address, George Ciprian Modoi: `cmodoi@math.ubbcluj.ro`